BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2014*

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ТИПА ВИМАНА-ВАЛИРОНА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.М.СУЛЕЙМАНОВ, Д.Э.ФАРАДЖЛИ
Бакинский Государственный Университет
dunya.farajli@mail.ru

В статье установливаются новые результаты типа оценок Вимана-Валирона для эволюционных уравнений обратно- параболического типа в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, вероятность, целая функция, оценки типа Вимана-Валирона, неравенства Чебышева, самосопряженный оператор, спектр, мера, гильбертово пространство.

Для аналитических функций известна классическая теорема Вимана и Валирона $[1-2]$ о связи максимума модуля $M(r)$ и максимального члена $\mu(r)$ целой функции *f(z)* в круге радиуса r :

$$M(r) \le \mu(r)(\log \mu(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Было получено большое количество результатов типа (1) в классе целых функции. В 1963 году американский математик Розенблюм [7] получил изящный результат типа (1): для некоторого класса функций $\Psi(t) > 0$ имеет место оценка вида

$$M(r) \le \mu(r)\sqrt{\Psi(\log M(r))}. \tag{2}$$

Аналогичный результат был установлен Ковари [8] для степенных рядов с конечным радиусом сходимости.

В работах Н.М.Сулейманова (см.$[5-6]$) были установлены аналогичные результаты типа Вимана-Валирона для решений эволюционных уравнений вида

$$U' \pm A(t)U(t) = 0, \tag{3}$$

где *A(t)* - самосопряженный полуограниченный снизу оператор в гильбертовом пространстве. В этих оценках роль функций *M(r)* и $\mu(r)$ играют, соответственно, функции

$$M(t) = \|U(t)\| \quad \text{и} \quad \mu(t) = \max_k |(U(t), \varphi_k(t))|, \tag{4}$$

где $\{\varphi_k(t)\}$ - полная ортонормированная система собственных функций оператора *A(t).*

В данной работе получены новые результаты типа оценок (2) для решений уравнений типа (3) при более общих ограничениях на оператор и устранены некоторые неточности, имевшие место в прежних результатах авторов .

Пусть *N(t)* – количество собственных значений λ_k оператора *A(t),* не превосходящих числа λ .

Лемма: Справедливо нелинейное дифференциальное неравенство вида:

$$\exp\{2g(t)\} \le \mu(t)^2 \cdot \Delta N(g', g''), \tag{5}$$

где

$$g(t) = \frac{1}{2}\log(U(t), U(t)),$$

$$\Delta N(\lambda,\delta)=N(\lambda+\delta)-N(\lambda-\delta),$$

$$\lambda = g', \delta = c\sqrt{g''+k(t)g'}, c > 1, k(t) > 0 \quad \text{и} \quad k(t) \in L_1(0,\infty).$$

Сопоставив решению *U(t)* случайную величину ξ с распределением вида $P(\xi = \lambda_k(t)) = a_k^2 / \|U(t)\|^2$, где $a_k = (U, \varphi_k)$ - коэффициенты Фурье функции *U(t)*; вычислив математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$, из неравенства Чебышева получаем:

$$M\xi=g', \; D\xi \le g''+k(t)g',$$

$$P(|\xi - g'| > c\sqrt{D\xi}) \le c^{-2}, c > 1.$$

Отсюда имеем

$$1 - c^{-2} \le P(|\xi - g'| < c\sqrt{g''+kg'}) = \frac{1}{\|U\|^2}\sum_{k\in I} a_k^2 \le \frac{\mu^2(t)}{\|U(t)\|^2} \cdot \Delta N(g', g'').$$

(здесь, $I = \{k : |\lambda_k - g'| \le c\sqrt{g''+kg'}\}$) .

Откуда и получаем неравенство вида (5) .

Теорема 1: Пусть для функции *N(λ)* выполняется условие вида (при $0<\delta<\lambda, \lambda\to\infty$)

$$\Delta N(\lambda, \delta) \le m(\lambda)\cdot n(\delta) \quad , \tag{6}$$

где *m(t)* и *n(t)* - положительные неубывающие выпуклые функции на $(0,\infty)$.

Пусть $\Psi(t)>0$ –неубывающая функция такая , что для некоторого $\alpha>0$ сходится интеграл вида

$$\int^{\infty}\left(\int^{g}\Psi(t)dt\right)^{-1/\alpha}dg<\infty.$$

Тогда вне, возможно, некоторого множества конечной меры справедлива оценка типа Вимана-Валирона-Розенблюма:

$$\frac{\|U(t)\|}{\sqrt[4]{\Psi(\log\|U(t)\|)}}\le\mu(t). \tag{7}$$

Для реализации условия (6) можно привести функцию $N(\lambda)$, когда оператор $A(t)=A(x,D)$ - формально самосопряженный положительный эллиптический оператор порядка m в R^n. Тогда по результатам Хермандера [4] и Агмона [3] имеет место асимптотическая оценка вида

$$N(\lambda)=c\lambda^{n/m}+O(\lambda^{n-1/m}).$$

Тогда при $0<\delta<\lambda$, $\lambda\to\infty$ условие (6) приобретает вид:

$$N(\lambda,\delta)\le c\delta\lambda^{\frac{n-1}{m}-1}\left[1+\lambda^{\frac{1}{m}}\right].$$

Следовательно, в условии (6) имеем:

$$m(\lambda)=\lambda^{s}\left[1+\lambda^{\frac{1}{m}}\right],n(\delta)=\delta,s=\frac{n-1}{m}-1.$$

Теорема 2: Пусть для $N(\lambda)$ выполняется неравенство вида

$$N(\lambda+\delta)-N(\lambda-\delta)\le c\lambda^{s}\delta(1+\lambda^{\alpha}),0\le\alpha<1,s>-1. \tag{8}$$

Пусть конечен интеграл вида:

$$\int^{\infty}\left(\int^{g}\Psi(t)dt\right)^{-1/2(s+1)}dg<\infty. \tag{9}$$

Тогда вне, возможно, некоторого множества конечный меры справедлива оценка типа оценки Розенблюма (7).

Замечание. При доказательстве теоремы 2 в работе [5] условие (8) выглядит так:

$$N(\lambda+\delta)-N(\lambda)\le c\lambda^{s}(\delta+\sqrt{\lambda}). \tag{10}$$

Но в лемме требуется условие на разность $N(\lambda+\delta)–N(\lambda-\delta)$. Введя новую независимую переменную типа

$$\xi=\xi(t)=\int_{0}^{t}\exp\left(\int_{\rho}^{\infty}k(\tau)d\tau\right)d\rho,$$

и полагая $\tilde{h}(\xi) = h(t(\xi))$, для любой функции h, получаем:

$$g'(t) = \tilde{g}'\cdot e^{\alpha(t)}, g''(t) = \tilde{g}''\cdot e^{2\alpha(t)} - k(t)\tilde{g}'\cdot e^{\alpha(t)},$$

$$\sqrt{g''+kg'} = e^{\alpha(t)}\cdot\sqrt{g'}, \quad \alpha(t) = \int_t^\infty k(\tau)d\tau \le M < \infty.$$

В терминах функции $\tilde{h}(\xi)$ выражение для $N(g', g'')$ в лемме принимает вид:

$$\Delta N(\tilde{g}', \tilde{g}'') = N(\lambda+\delta) - N(\lambda-\delta).$$

Так как:

$$N(\lambda+\delta) - N(\lambda-\delta) =$$

$$[N(\lambda+\delta) - N(\lambda)] + [N(\lambda) - N(\lambda-\delta)] \le c\lambda^s(\delta+\sqrt{\lambda}) + \Delta_1 N(\lambda,\delta),$$

где разность $\Delta_1 N(\lambda,\delta) = [N(\lambda) - N(\lambda-\delta)]$, очевидно, характеризует количество тех собственных значений λ_k, которые расположены в интервале $(\tilde{g}'-c\sqrt{\tilde{g}''}, \tilde{g}')$, которое не больше чем $\sqrt{g''}$, то в итоге получим, что

$$\Delta N(\tilde{g}', \tilde{g}'') = c\tilde{g}'^s(\sqrt{\tilde{g}'} + \sqrt{\tilde{g}''}) + c\sqrt{\tilde{g}''}. \tag{11}$$

Тогда лемма принимает вид:

$$e^{2\tilde{g}(t)} \le \mu^2(t)\left[\tilde{g}'^s(\sqrt{\tilde{g}'} + \sqrt{\tilde{g}''}) + c\sqrt{\tilde{g}''}\right] \tag{12}$$

Теперь находим такую функцию $\Psi(t)$, чтобы выполнялось неравенство вида

$$\Delta N(\tilde{g}', \tilde{g}'') \le \sqrt{\Psi(\tilde{g})}. \tag{13}$$

(В дальнейшем для простаты вместо $\tilde{g}$ будем писать просто g). Пусть выполнены условия теоремы 2. Из (13) получим:

$$g'^s\sqrt{g''}(1+g'^\alpha) \le \sqrt{\Psi(\tilde{g})},\ 0 \le \alpha < 1.$$

Отсюда имеем:

1) $g'^{s+\alpha}\sqrt{g''} \le \frac{1}{2}\sqrt{\Psi(g)},$ и *2)* $g'^\alpha\sqrt{g''} \le \frac{1}{2}\sqrt{\Psi(g)}$. (*)

В случае 1) получим :

$$g'^{2(s+\alpha)}g'' \le \frac{1}{4}\sqrt{\Psi(g)}, \qquad g'^{2s+2\alpha+1}g'' \le \frac{1}{4}\Psi(g)g', \qquad (s_1 = s+\alpha+1)$$

$$(g'^{2(s+\alpha+1)})' \le \frac{s+\alpha+1}{2}\Psi(g)g',\ g'^{2s_1} \le \frac{s+\alpha+1}{2}\int^g \Psi(t)dt,\ g' \le \left[\frac{s_1}{2}\int^g \Psi(t)dt\right]^{\frac{1}{2s_1}} \equiv \Psi_1(g).$$

Пусть $E = \{g' > \Psi_1(g)\}$. Тогда:

$$mesE = \int_E dt < \int_E \frac{g'dt}{\Psi_1(g)} \le \int^{\infty} (\int^{g} \Psi(t)dt)^{\frac{1}{2s_1}} dg < +\infty. \qquad (***)$$

Следовательно, вне E, $mesE < \infty$ выполнено неравенство 1) в (*) **.**
Можно показать , что вне E верно и неравенство 2). Следовательно, вне E верно неравенство (13) . Тогда, в силу Леммы , получаем :

$$e^{2g(t)} \le \mu^2(t)\Delta N(g', g'') \le \mu^2(t)\sqrt{\Psi(g)},$$

или, что тоже самое, оценку вида (7).
В частности , при $\Psi(t) = t^k$ из условия (**) получим оценку вида

$$\|U(t)\| \le \mu(t)(\log \mu(t))^{\frac{2s+2\alpha+1}{4}+\varepsilon}.$$

Теорема доказана.
Теперь о теореме 1. Выберем функцию $\Psi(t)$ так чтобы

$$\mathrm{m}(g')\mathrm{n}(\sqrt{g''}) \le \Psi(g). \qquad (14)$$

Тогда имеем: $\mathrm{n}(\sqrt{g''}) \le \Psi(g);\quad \mathrm{m}(g') \le \sqrt{\Psi(g)},\quad \sqrt{g''} \le n^{-1}(\sqrt{\Psi(g)}),$

$g'' \le \left[n^{-1}(\sqrt{\Psi(g)})\right]^2 \equiv \Psi_1(g).$

Отсюда имеем: $g'g'' \le \Psi_1(g)g',\ \left(g'^2\right)' \le 2\Psi_1(g)g',\ g'^2 \le 2\int^{g} \Psi_1(t)dt.$

$$g' \le (2\int^{g} \Psi_1(t)dt)^{\frac{1}{2}} \equiv \Psi_2(g).$$

Пусть

$E_1 = \{g' > \Psi_2(g)\}$, тогда $mesE_1 \le \int^{\infty} \frac{g'dt}{\Psi_2(g)} \le \int^{\infty} (\int^{g} \Psi_1(t)dt)^{-\frac{1}{2}} dg < \infty.$

Следовательно, вне E_1 , $mesE_1 < \infty$ выполняется неравенство $\mathrm{n}(\sqrt{g''}) \le \Psi(g)$. Аналогично и для второго неравенства. Приведем одну реализацию. Пусть $m(t) = t^p; n(t) = \sqrt{t}$. Тогда неравенство (6) примет вид:

$$\Delta N(g', g'') = g'^p \sqrt[4]{g''} \le \sqrt[4]{\Psi(g)}. \qquad (15)$$

Отсюда получаем:

$g'^{4p} g'' \le \Psi(g), \qquad g'^{4p+1} g'' \le \Psi(g)g', \qquad (g'^{4p+2})' \le (4p+2)\Psi(g)g',$

$$g'^{4p+2} \le (4p+2)\int^{g} \Psi(t)dt, \qquad g' \le ((4p+2)\int^{g} \Psi(t)dt)^{1/(4p+2)} \equiv \Psi_1(g).$$

Пусть, $E = \{g' > \Psi_1(g)\}$. Тогда

$$mesE = \int_E dt < \int_E \frac{g'\,dt}{\Psi_1(g)} \le \int^{\infty} (\int^{g} \Psi(t)dt)^{-\frac{1}{4p+2}} dg < +\infty. \quad (16)$$

Тогда, вне *E*, $mesE < \infty$, и верно неравенство (15). Тогда, из Леммы получается оценка вида

$$\|U(t)\| \le \mu(t)\sqrt[8]{\Psi(\log\|U(t)\|)}.$$

В частности, при $\Psi(t) = t^k$ из условия (16) получим оценку вида:

$$\|U(t)\| \le \mu(t)(\log \mu(t))^{\frac{4p+1}{8}+\varepsilon}.$$

При $p = \frac{3}{4}$ получим точную форму оценки Вимана-Валирона:

$$\|U(t)\| \le \mu(t)(\log \mu(t))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, t \to +\infty.$$

В этом частном случае функция $\mu(t)$ характеризует скорость убывания коэффициентов Фурье для начальной функции $U_0(x)$ в обратно-параболическом уравнении $U'(t) - A(t)U(t) = 0$, где $A(t) = -\Delta_x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wiman. Acta Math., 1914, 37, p. 305 - 326.
2. Valiron G., Bull. Sosiete, Math., 1916, p. 45 - 64.
3. S. Agmon. Asymptotic Formula with Remainder Estimates for Eightenvalues of Elliptic Operators, Arch. Rational Mech. Anal., 28(1968), p.165-183.
4. Hörmander L. The Spectral Function of an Elliptic Operator, Acta Math. 121 (1968), p.193-215.
5. Сулейманов Н.М. Вероятность, целые функции и оценки типа Вимана – Валирона для эволюционных уравнений. Монография, М.: МГУ, 2012, с.235.
6. Сулейманов Н.М. Об оценках типа Вимана - Валирона для решений эволюционных уравнений. сб. «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы». Труды междунар. научн. конфр. 2. Уфа, 2008, т.1, с. 190 – 194
7. Rosenbloom P.C. Probability and Entire Functions, Studies in Math. Anal. and Related Topics, California, Stanford Univ. Press, 1963, p. 325-332.
8. Kovari T. On the Maximum Modulus and Maximum Term of Function Analytic in the disc. J. London. Math. Soc.1966, v.41, No3. p.129-137.

EVOLYUSİON TƏNLİKLƏR ÜÇÜN VİMAN - VALİRON TİPLİ QİYMƏTLƏNMƏLƏR HAQQINDA

N.M.SÜLEYMANOV , D.E.FƏRƏCLİ

XÜLASƏ

Məqalədə tərs-parabolik tipli evolyusion tənliklər üçün tənlikdə verilən operatorlar sinfi üzərinə daha ümumi şərtlər qoyulmaqla Viman -Valiron tipli qiymətlənmələr müəyyən edilir.

Açar sözlər: evolyusion tənlik, ehtimal, tam funksiya, Viman - Valiron tipli qiymətlənmə, Çebışev bərabərsizliyi, öz-özünə qoşma operator, spektr, ölçü, Hilbert fəzası.

ON THE WİMAN - VALİRON TYPE ESTİMATES FOR EVOLUTİON EQUATİON

N.M.SULEYMANOV , D.E.FARAJLI

SUMMARY

This paper is devoted to the establishment of Wiman - Valiron type estimates for evolution equation in the Hilbert space.

Key words: evolution equation, probability, entire function, estimaties of Wiman - Valiron type, Chebyshev's inequality, self-adjoint operator, spectrum, measure, Hilbert space.

Поступила в редакцию: 26.05.2014 г.
Подписано к печати: 04.07.2014 г.